■ 표 7.3 Wyndor Glass Co. 예제의 쌍대에 적용된 b_i 파라메트릭 선형계획절차

			계수							
θ의 범위	기저변수	등식	Z	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	우변	최적해
$0 \le \theta \le \frac{9}{7}$	$Z(\theta)$	(0)	1	2	0	0	2	6	$-36+2\theta$	$y_1 = y_4 = y_5 = 0$
	y_3	(1)	0	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{3+2\theta}{3}$	$y_3 = \frac{3+2\theta}{3}$
	y_2	(2)	0	$-\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{9-7\theta}{6}$	$y_2 = \frac{9-7\theta}{6}$
$\frac{9}{7} \le \theta \le 5$	$Z(\theta)$	(0)	1	0	6	0	4	3	$-27-5\theta$	$y_2 = y_4 = y_5 = 0$
	y_3	(1)	0	0	1	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5-\theta}{2}$	$y_3 = \frac{5-\theta}{2}$
	y_1	(2)	0	1	-3	0	-1	$\frac{3}{2}$	$\frac{-9+7\theta}{2}$	$y_1 = \frac{-9+7\theta}{2}$
$\theta \ge 5$	$Z(\theta)$	(0)	1	0	12	6	4	0	$-12-8\theta$	$y_2 = y_3 = y_4 = 0$
	y_5	(1)	0	0	-2	-2	0	1	$-5+\theta$	$y_5 = -5+\theta$
	y_1	(2)	0	1	0	3	-1	0	$3+2\theta$	$y_1 = 3+2\theta$

그러므로 표에서 두 기저변수들은

$$y_3 = \frac{3+2\theta}{3} \quad \text{and} \quad y_2 = \frac{9-7\theta}{6}$$

$0 \le \theta \le \frac{9}{7}$에 대해 비음으로 남는다. $\theta = \frac{9}{7}$를 지나 θ를 증가시키면 y_2는 쌍대 심플렉스 방법의 다른 반복에서 탈락기저변수가 될 것이다. 표 7.3에서 요약한다.

표 7.2와 표 7.3을 동시에 추적하여 두 절차들 사이의 쌍대관계를 주의하기 바란다.

이 책의 웹사이트의 예제 풀이에 b_i의 체계적인 변화에 대한 다른 절차들이 포함되어 있다.

7.3 상한기법

선형계획 문제들에서 변수 x_j의 몇 개 혹은 모두가 다음과 같은 상한제약식들을 가지는 것은 매우 보편적인 일이다.

$$x_j \le u_j$$

여기서 u_j는 x_j의 최대 가능값을 나타내는 양의 상수이다. 심플렉스 방법에서 소요되는 계산 시간 중 비음제약식의 수는 상대적으로 중요하지 않는 반면 가장 중요한 결정요인은 함수제약식들의 수라고 4.8절에서 지적하였다. 그러므로 함수제약식 중 많은 수의 상한제약식이 존재하면 계산에 필요한 노력이 엄청나게 증가한다.

상한기법은 함수제약식들에서 상한제약식들을 제거하고 그것들을 분리하여 본질적으로 비

음제약식[5] 같이 따로 다룸으로써 증가된 노력을 피한다. 상한제약식을 이런 방법으로 제거하면 변수들이 상한을 넘지 않는 한 아무 문제가 생기지 않는다. 심플렉스 방법이 어떤 변수들을 증가시키는 때는 단지 새로운 기저가능해를 구하기 위해 진입기저변수를 증가시킬 때이다. 그러므로 상한기법은 단순히 보통의 방법으로 심플렉스 방법을 문제의 나머지(즉 상한제약식이 없는)에 적용시키고 각각의 새로운 기저가능해들이 보통의 하한(비음)제약식들과 상한제약식들을 만족시키는 하나의 증가된 제한을 가지는 것이다.

이런 아이디어를 충족시키기 위해 상한제약식 $x_j \le u_j$를 가지는 결정변수 x_j는 항상 다음과 같이 대체될 수 있음을 주의하라.

$$x_j = u_j - y_j$$

그런 다음 여기서 y_j는 결정변수가 될 것이다. 바꾸어 말하면, 결정변수를 영보다 큰 양(x_j)로 두든지 u_j보다 작은 양($y_j = u_j - x_j$)으로 두든지 선택할 수 있다(x_j와 y_j를 상보결정변수로 부를 것이다).

$$0 \le x_j \le u_j$$

이기 때문에 다음 식도 성립한다.

$$0 \le y_j \le u_j$$

그러므로 심플렉스 방법이 실행되는 어떤 시점에도 다음 둘 중에 하나를 선택할 수 있다.

1. $0 \le x_j \le u_j$의 범위에서 x_j를 사용한다. 혹은
2. x_j를 $0 \le y_j \le u_j$의 범위를 가지는 $u_j - y_j$로 대체한다.

상한기법은 이런 결정을 하기 위한 다음 규칙을 사용한다.

규칙: 선택 1에서 시작한다.
$x_j = 0$일 때마다 선택 1을 사용한다. 그래서 x_j는 비기저이다.
$x_j = u_j$일 때마다 선택 2를 사용한다. 그래서 $y_j = 0$은 비기저이다.
x_j가 다른 극값에 도달할 때마다 선택을 바꾼다.

그러므로 기저변수가 상한에 도달할 때마다 선택을 바꾸고 새로운 기저가능해를 찾기 위해 그것의 상보결정변수를 새로운 비기저변수(탈락기저변수)로 사용해야 한다. 그러므로 심플렉스 방법에 대한 이런 중요한 수정은 탈락기저변수 선택을 위한 규칙에 있다.

심플렉스 방법은 진입기저변수가 증가함에 따라 가장 먼저 음이 되어 불가능이 되는 첫 번째 변수를 탈락기저변수로 선택함을 상기하자. 여기서의 이런 수정은 진입기저변수가 증가함에 따라 음이 되는 경우나 상한을 넘는 경우 중 첫 번째 불가능이 되는 변수를 대신 선택한다

[5] 상한기법은 변수들이 상한제약식과 보통의 비음제약식을 가진다고 가정한다. 만약 변수가 영과 다른 하한을 가지면, 즉 $x_j \ge L_j$, 이 제약식은 변수들의 변화, $x_j' = x_j - L_j$,를 통하여 비음제약식으로 전환할 수 있고 그래서 $x_j' \ge 0$.

(하나의 가능성은 진입기저변수가 상한을 먼저 넘어 불가능이 될지도 모른다. 그 결과 그것의 상보결정변수가 탈락기저변수가 된다). 만약 탈락기저변수가 영에 도달하면 보통의 심플렉스 방법을 실행하라. 그렇지만, 그것이 대신 상한에 도달하면 선택을 바꾸어 상보결정변수를 탈락기저변수로 하라.

예제

상한기법을 설명하기 위해 다음 문제를 고려하라.

$$\text{Maximize} \quad Z = 2x_1 + x_2 + 2x_3,$$

subject to

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 \quad\quad &= 12 \\ -2x_1 \quad\quad + x_3 &= \ \ 4 \end{aligned}$$

and

$$0 \le x_1 \le 4, \qquad 0 \le x_2 \le 15, \qquad 0 \le x_3 \le 6.$$

그러므로 모든 세 변수들은 상한제약식을 가진다($u_1 = 4$, $u_2 = 15$, $u_3 = 6$).

두 등식제약식들은 가우스 소거를 통해 초기 기저가능해($x_1 = 0$, $x_2 = 12$, $x_3 = 4$)를 식별할 수 있게 이미 정확한 형태를 가지고 있고 이 해에서 어떤 변수도 상한을 넘지 않는다. 그래서 인공변수들을 도입하지 않고 x_2와 x_3를 초기기저변수들로 사용할 수 있다. 그렇지만, 다음과 같은 초기 식 (0)을 얻기 위해 이 변수들은 대수적으로 목적함수에서 제거될 필요가 있다.

$$\begin{array}{lllr} & Z & -\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = & 0 \\ & & +\ (4x_1 + x_2 \quad\quad\ = & 12) \\ & & +\ 2(-\ 2x_1 \quad\quad +\ x_3 = & 4) \\ \hline (0) & Z & -\ 2x_1 \quad\quad\quad\quad\quad = & 20. \end{array}$$

처음 반복을 시작하기 위해, 이 초기 식 (0)에서 초기 진입기저변수는 x_1이다. 상한제약식들이 포함되어 있지 않기 때문에 전체의 초기 식들과 탈락기저변수들의 선택을 위한 해당 계산들은 표 7.4에 나타나 있다. 두 번 째 열은 어떤 기저변수(x_1 포함)가 불가능이 되기 전에 진입기저변수 x_1이 영에서 얼마나 증가할 수 있는가를 보여준다. 식 (0) 옆에 주어진 최댓값은 x_1에 대한 상한제약식이다. 식 (1)에서, x_1의 계수가 양이기 때문에, x_1을 3까지 증가시키면 이 식에 있는 기저변수(x_2)의 값은 12에서 하한 영으로 감소된다. 식 (2)에서, x_1의 계수가 음이기 때문에 x_1을 1로 증가시키면 이 식에 있는 기저변수(x_3)의 값은 4에서 상한 6으로 증가된다.

■ 표 7.4 상한기법을 위한 예제에서 초기 탈락기저변수를 위한 식들과 계산들

초기 등식들 집합	x_1의 최대 가능값
(0) $Z - 2x_1 = 20$	$x_1 \le 4$ (since $u_1 = 4$)
(1) $4x_1 + x_2 = 12$	$x_1 \le \frac{12}{4} = 3$
(2) $-2x_1 + x_3 = 4$	$x_1 \le \frac{6-4}{2} = 1 \leftarrow$ 최솟값 (because $u_3 = 6$)

표 7.4에서 식 (2)는 x_1의 가장 작은 최대가능값을 가지기 때문에 이 식의 기저변수(x_3)가 탈락기저변수를 제공한다. 그렇지만, x_3은 상한에 도달하기 때문에 x_3를 $6 - y_3$로 대체한다. 결과적으로 $y_3 = 0$이 다음 기저가능해에서 새로운 비기저변수가 되고 x_1은 식 (2)에서 새로운 기저변수가 된다. 이 교체는 이 식에서 다음과 같은 변화를 가지고 온다.

$$
\begin{array}{lrl}
(2) & -2x_1 + \quad x_3 & = \ \ 4 \\
 & \rightarrow -2x_1 + 6 - y_3 & = \ \ 4 \\
 & \rightarrow -2x_1 - \quad y_3 & = -2 \\
 & \rightarrow \quad x_1 + \dfrac{1}{2}y_3 & = \ \ 1
\end{array}
$$

그러므로 x_1을 다른 등식들에서 대수적으로 제거하고 난 뒤, 두 번째 등식들의 집합은 다음과 같이 된다.

$$
\begin{array}{llrcl}
(0) & Z & + \ y_3 & = & 22 \\
(1) & & x_2 - 2y_3 & = & 8 \\
(2) & x_1 & + \dfrac{1}{2}y_3 & = & 1.
\end{array}
$$

결과로 나온 기저가능해는 $x_1 = 1, x_2 = 8, y_3 = 0$이다. 최적시험에 의해 이것은 최적해이고 $x_1 = 1, x_2 = 8, x_3 = 6 - y_3 = 6$이 원문제의 해가 된다.

상한기법의 **다른 예제**를 보기 원하면 이 책의 웹사이트의 사용된 예제 풀이에 하나의 예가 포함되어 있다.

7.4 내부점알고리즘

4.9절에서 1984년 나온 선형계획에 대한 극적인 개발을 토의하였다. 즉 그것은 크기가 큰 선형계획 문제들을 풀기 위해 AT&T Bell 연구소의 Narendra Karmarkar가 개발한 강력한 알고리즘으로 심플렉스 방법과 매우 다른 방법이다. 여기서는 그의 알고리즘의 상대적인 기본 변형[6] ("유연" 혹은 "유연척도"변환)을 설명함으로써 Karmarkar 방법을 소개한다(IOR Tutorial은 내부점알고리즘으로 자동풀기라는 제목으로 변형을 포함한다).

이 절에서는 수학적 상세를 피하고 직관적인 수준에서 Karmarkar의 주요 아이디어들에 초점을 맞춘다. 특히 알고리즘의 완전한 실행을 위해 필요하지만(예를 들면 초기 가능해 시험해를 얻는 방법) 기본적인 개념 이해를 위해서는 주요하지 않은 상세들은 피할 것이다. 설명될 아

[6] 이 변형의 기본 방법은 실제로 1967년 러시아 수학자 I. I. Dikin에 의해 제안되었다. 그러고 난 뒤 Karmarkar의 작품이 나온 뒤 바로 E. R. Barnes, T. M. Cavalier, A. L. Soyster를 포함하여 많은 연구자들에 의해 재발견되었다. 또한 다음 논문을 보라: R. J. Vanderbei, M. S. Meketon, and B. A. Freedman, "A Modification of Karmarkar's Linear Programming Algorithm," *Algorithmica*, **1**(4) (Special Issue on New Approaches to Linear Programming): 395—407, 1986.