ADP 정리 노트

2025-10-07

확률과 통계

통계학

- **불확실한 상황** 하에서 데이터에 근거하여 **과학적인 의사결정**을 도출하기 위한 이론과 방법의 체계
- **모집단**으로 부터 수집된 **데이터**(sample)를 기반으로 모집단의 **특성을 추론**하는 것을 목표로 한다.

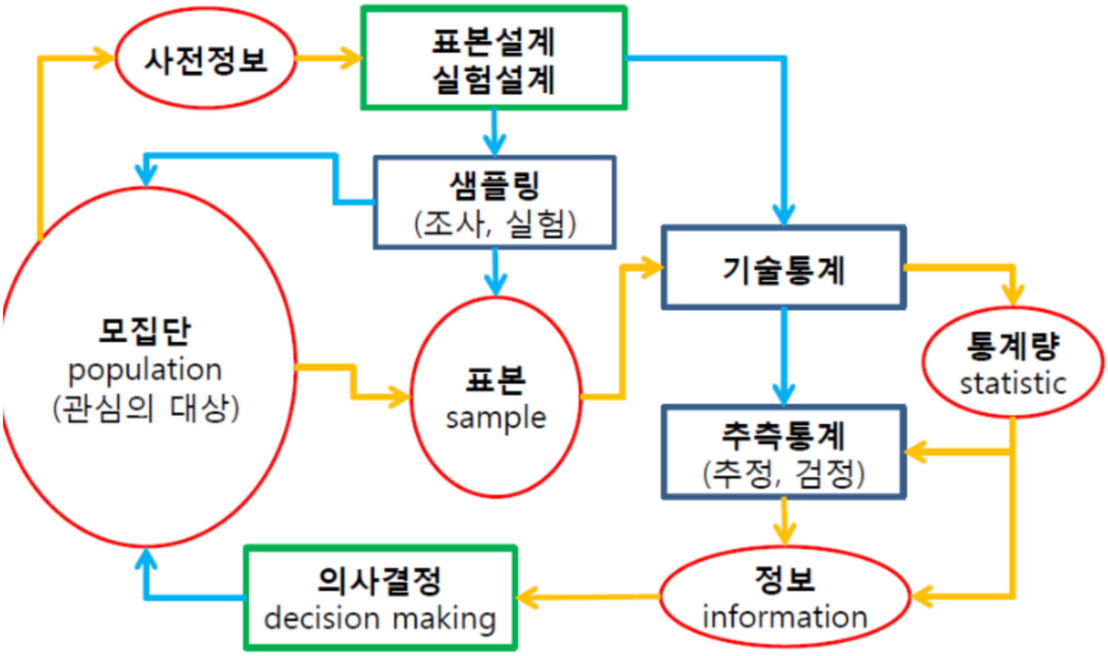
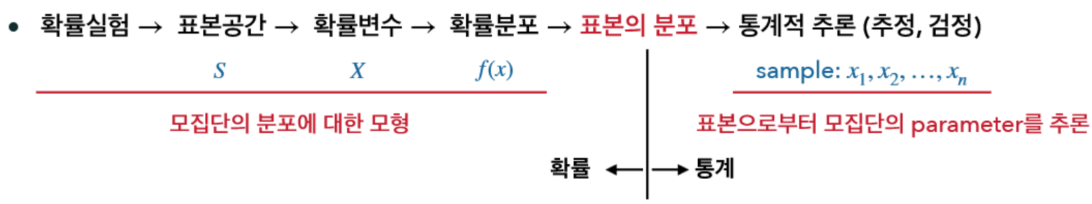


Figure 1: 통계적 의사결정 과정

확률

- 고전적 의미: 표본공간에서 특정 사건이 차지하는 비율
- 통계적 의미: 특정 사건이 발생하는 **상대도수의 극한**
  - 각 원소의 발생 가능성이 동일하지 않아도 무한한 반복을 통해 수렴하는 값을 구할 수 있다.

확률 분포 정의 단계



- **Experiment(확률실험)**: 동일한 조건에서 독립적으로 반복할 수 있는 실험이나 관측
- **Sample space(표본공간)**: 모든 simple event의 집합
- **Event(사건)**: 실험에서 발생하는 결과 (부분 집합)
- **Simple event(단순사건)**: 원소가 하나인 사건
- **확률 변수**: 확률실험의 결과를 수치로 나타낸 변수

확률 분포

이산 확률 분포

이산 표본 공간, 연속 표본공간에서 정의 가능포

- **베르누이 시행**: 각 시행은 서로 **독립적**이고, 실패와 성공 **두 가지 결과만 존재**.
  - 단 **모집단의 크기가 충분히 크고**, **표본(시행)의 크기가 충분히 작다면 비복원 추출**에서도 **유효**
  - 평균: p
  - 분산: p(1-p)
- **이항 분포**: n번의 독립적인 **베르누이 시행**을 수행하여 성공 횟수를 측정
  - X ~ B(n, p), $f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$
  - 평균: np
  - 분산: np(1-p)
  - n이 매우 크고, p가 매우 작을 때, **포아송 분포로 근사**할 수 있다. (λ = np)
- **음이항 분포**
  - 정의: n번의 독립적인 **베르누이 시행**을 수행하여 k번 성공하고, r번 실패한 경우 (n = k + r)
    1. r번의 실패가 나오기 전까지, 성공한 횟수 x
       * X ~ NB(r, p), $f(x) = \binom{x+r-1}{x} p^x (1-p)^r$
       * 평균: $\frac{rp}{1-p}$
       * 분산: $\frac{rp}{(1-p)^2}$
    2. r번의 실패가 나오기 전까지, 시행한 횟수 x
       * 4번에서 성공을 실패로 바꿈
    3. k번의 성공이 나오기 전까지, 실패한 횟수 x
       * 1번에서 실패를 성공으로 바꿈
    4. k번의 성공이 나오기 전까지, 시행한 횟수 x
       * $f(x) = \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k}$
       * k가 1일 때 기하분포와 동일
    5. n번의 시행 횟수에서, k번 성공 또는 r번 실패한 경우: 이항분포
- **기하 분포**:
  - 정의:
    1. 성공 확률이 p인 **베르누이 시행**에서 첫 성공까지의 시행 횟수
       * X ~ G(p), $f(x) = (1-p)^{x-1} p, x = 1, 2, 3, \ldots$

        - 평균: $\frac{1}{p}$
        - 분산: $\frac{1-p}{p^2}$
    2. 성공 확률이 p인 **베르누이 시행**에서 첫 성공까지의 실패 횟수
        - X ~ G(p), $f(x) = (1-p)^x p, x = 0, 1, 2, \ldots$
        - 평균: $\frac{1-p}{p}$
        - 분산: $\frac{1-p}{p^2}$
  - **비기억 특성**: $P(X > n + k | X > n) = P(X > k)$
- **초기하 분포**: **베르누이 시행이 아닌 시행**에서 성공하는 횟수
  - X ~ H(n, N, k), $f(x) = \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$
  - 평균: $\frac{nK}{N}$
  - 분산: $\frac{nK(N-K)(N-n)}{N^2(N-1)}$
- **포아송 분포**: **임의의 기간**동안 **어떤 사건이 간헐적**으로 발생할 때, 동일한 길이의 기간동안 실제 사건이 발생하는 횟수
  - X ~ Poisson(λ), $f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \lambda > 0$
  - 평균: λ
  - 분산: λ

연속 확률 분포

연속 표본 공간에서 정의 가능

- **균일 분포**
  - $f(x) = \frac{1}{b-a}, a \le x \le b$
  - 평균: $\frac{a+b}{2}$
  - 분산: $\frac{(b-a)^2}{12}$
- **정규 분포**
  - $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$
  - 선형 변환: $Y = aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$
- **t 분포**
  - 자유도가 커질수록 표준 정규분포에 근사함.
  - $\frac{Z}{\sqrt{V/n}} \sim t(n)$, Z: 표준정규분포, V: 자유도가 n인 카이제곱분포
- **f 분포**
  - $F = \frac{X_1/\nu_1}{X_2/\nu_2}, X_1 \sim \chi^2(\nu_1), X_2 \sim \chi^2(\nu_2)$, X1과 X2는 서로 독립
- **감마 분포**
  - α: 분포의 형태 결정, θ: 분포의 크기 결정
  - 평균: αθ
  - 분산: $\alpha\theta^2$
  - **카이제곱 분포**: α = v/2, θ = 2 인 감마분포
    - $Z_i \sim N(0, 1)$일 때, $Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_n^2 \sim \chi^2(n)$

- X_i가 서로 독립이고, 자유도가 ν_i인 카이제곱분포를 따른다면, $X_1 + X_2 + ... + X_n \sim x^2(\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_n)$
    - 자유도가 커질수록 기댓값을 중심으로 모이고, 대칭에 가까워진다.
  - **지수 분포**: α = 1, θ = 1/λ 인 감마분포
    - $X\ Exp(\lambda = \frac{1}{\theta})$, f(x) = $\lambda e^{-\lambda x}, x > 0$
    - θ: 평균 사건 발생 간격, λ: 단위 시간당 사건 발생 횟수
    - 포아송 분포에서 사건 발생 간격의 분포
    - $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, \theta), \theta = 1/\lambda$
    - 비기억 특성을 가진다: $p(X > s + t | X > s) = p(X > t) = e^{-\lambda t}$
    - 독립적으로 동일한 지수분포를 따르는 확률변수 n개의 합은 $\alpha = n, \theta = \frac{1}{\lambda}$인 감마분포를 따른다.

다변량 분포

- **다항 분포**: n번의 독립적인 **베르누이 시행**을 수행하여 k개의 범주로 분류
  - X ~ M(n, p1, p2, ..., pk), $f(x_1, x_2, ..., x_k) = \frac{n!}{x_1!x_2!...x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} ... p_k^{x_k}$
  - 평균: $[np_1, np_2, ..., np_k]$
  - 분산: $[np_1(1 - p_1), np_2(1 - p_2), ..., np_k(1 - p_k)]$
  - 공분산: $-np_i p_j (i \neq j)$
  - 독립인 변수의 갯수는 k-1개 (k개의 사건)

샘플링

분포의 동질성 검정

- 연속형
  - 이표본 검정: 콜모고로프-스미르노프 검정 사용
  - 일표본 검정:
    - 정규분포, 지수분포: 앤더슨-달링 검정 사용
    - 그 외: 몬테카를로 방법 사용
- 이산형
  - 이표본: 카이제곱 독립성 검정
  - 일표본: 카이제곱 동질성 검정

표본의 분포

- 샘플링에 따라 통계량이 다른 값을 가질 수 있다. 따라서 통계량의 분포를 이용한 통계적 추론이 가능하다.
- 통계량: 표본의 특성을 나타내는 값

- 추정량: 아래의 조건을 만족하는 통계량
    - 불편성: 추정량의 기대값이 추정하려는 모수와 같아야 한다.
    - 효율성: 분산이 작아야 한다. 표본의 갯수가 많아질수록 분산이 작아져야 한다.

표본 평균의 분포

- 모집단의 분포와 관계없이, 모집단의 평균이 μ이고, 분산이 σ^2이면, $\bar{X}$의 평균은 μ이고, 분산은 σ^2/n인 정규분포를 따른다.
    - 단 모집단의 분포에 따라 표본의 크기가 충분히 커야함. (중심극한정리[1])
- 만약 모집단의 분산을 모를 경우, σ를 s로 대체하여, t분포를 따르는 표본 평균의 분포를 구할 수 있다.
    - 단 이때는 **모집단이 정규분포를 따라야 한다.**

표본 분산의 분포

- **정규 모집단으로 부터 나온 표본**의 분산 S에 대하여, $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$은 자유도가 n-1인 카이제곱 분포를 따른다.
    - 모집단이 정규분포를 따르지 않을 경우, 비모수적인 방법을 사용해야 한다.
- 두 정규 모집단으로부터 계산되는 표본분산의 비율은 f-분포를 따른다.

추정

- 통계적 추론: **모집단에서 추출된 표본**의 **통계량**으로부터 **모수**를 추론하는 것
    - 추정
        - 점추정
        - 구간추정
    - 가설 검정

점 추정

- 불편성
    - $E(\hat{\theta}) = \theta$
    - bias = $E(\hat{\theta}) - \theta$
        - 보통 sample size가 커질수록 bias는 0에 수렴
    - $\bar{X}, X_n$은 μ의 불편추정량이다.
- 최소분산
    - $Var(\bar{X})$가 $Var(X_n)$보다 분산이 작아서 더 좋은 추정량

---

[1] 모집단의 분포와 상관 없이, 표본의 평균은 정규분포에 수렴한다는 정리. 이항분포의 경우, P(X=c) ~ P(c - 0.5 < X < c + 0.5)로 근사 가능하다는 라플라스의 정리를 일반화한 것

- $MSE(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2] = Var(\hat{\theta}) + bias^2$
    - ⋆ 큰 오차에 더 큰 페널티를 주기 위해 제곱

	모수 θ	표본크기	추정량 $\hat{\theta}$	기대값 $E(\hat{\theta})$	표준오차 $\sigma_{\hat{\theta}}$
모평균	μ	n	$\overline{X}$	μ	$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
모비율	p	n	$\hat{p} = X/n$	p	$\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$
모평균차이	$\mu_1 - \mu_2$	n_1, n_2	$\overline{X}_1 - \overline{X}_2$	$\mu_1 - \mu_2$	$\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
모비율차이	$p_1 - p_2$	n_1, n_2	$\hat{p}_1 - \hat{p}_2$	$p_1 - p_2$	$\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$

Figure 2: 대표적인 불편추정량

- **전부 중심극한의정리를 적용**할 수 있다. (비율은 0과 1의 평균이므로)
- 모평균, 모비율의 차이는 서로 독립이라는 가정이 필요하다.

구간 추정

- α: 유의수준
- 1 - α: 신뢰수준[2]
- (θ_L, θ_U) = (1 - α) × 100% 신뢰구간

1. (θ_L, θ_U) 이 충분이 높은 가능성으로 미지의 모수 θ를 포함해야 한다
2. 구간이 충분히 좁아야 한다
    - 표준 정규분포에서 0을 중심으로 대칭일 때 길이가 짧다.
    - 고로 신뢰구간이 대칭임

표본의 크기 결정

특정 오차 아래로 하는 표본의 수 구하는 법

- 그냥 표본오차가 목표 오차보다 작게 하는 값을 구하면 됨.
- **모비율**을 모를 때는 일단 **0.5로 보수적으로 놓고 계산**

모분산 추정

- 카이제곱 분포는 가장 짧은 신뢰구간을 구하기 쉽지 않음
    - 그냥 쉽게 구하기 위해 $(x^2_{\alpha/2}, x^2_{1-\alpha/2})$를 사용

[2] 샘플링을 무한히 반복했을 때, **이들의 신뢰 구간 중 95%의 구간이 실제 모수를 포함**한다. 즉, 구간이 확률 변수이다.

- 모분산의 신뢰구간: $\left(\frac{(n-1)s^2}{x^2_{(1-\alpha)/2}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{x^2_{\alpha/2}(n-1)}\right)$
- 표본의 수가 적을수록, 카이제곱 분포의 신뢰구간은 더 길어진다.

분산분석

<table>
<tr><th rowspan="2">표본</th><th rowspan="2">개수</th><th colspan="2">비모수 검정</th><th colspan="2">모수 검정</th></tr>
<tr><th>서열척도</th><th>명목척도</th><th>등분산성 o</th><th>등분산성 x</th></tr>
<tr><td>단일 표본</td><td>1개</td><td>부호검정,
부호순위검정</td><td>적합성 검정,
Run 검정</td><td colspan="2">일표본 t-검정</td></tr>
<tr><td rowspan="2">대응 표본</td><td>2개</td><td>부호검정,
부호순위검정</td><td>McNemar 검정</td><td colspan="2">대응표본 t-검정</td></tr>
<tr><td>K개</td><td>Friedman 검정</td><td>Cochran Q 검정</td><td colspan="2">반복측정 분산분석</td></tr>
<tr><td rowspan="2">독립 표본</td><td>2개</td><td>순위합 검정,
만위트니U 검정</td><td rowspan="2">독립성 검정,
동질성 검정</td><td>독립표본 t-검정</td><td>Welch’s t-검정</td></tr>
<tr><td>K개</td><td>Kruskal-Wallis 검정</td><td>일원배치 분산분석</td><td>Welch’s ANOVA</td></tr>
</table>

상관분석

상관계수

- 두 변수 간의 선형적 관계의 강도와 방향을 나타내는 척도

질적 변수

- **스피어만** 상관계수: 서열척도 vs 서열척도. 확률분포에 대한 가정 필요 없음.
- **켄달의 타우**: 서열척도 vs 서열척도.
  - 둘 중 하나가 연속형이여도 스피어만, 켄달의 타우 중 하나를 사용.
  - 샘플이 적거나, 이상치, 동점이 많은 경우 켄달의 타우를 주로 사용.
  - **두 변수의 크기는 같아야함**.
- 크래머 v: 명목척도 vs 명목척도.
  - 적어도 하나의 변수가 3개 이상의 level을 가지면 사용
  - 범위는 0~1. 0.2 이하면 서로 연관성이 약하고, 0.6 이상이면 서로 연관성이 높음.

양적 변수

- 피어슨 상관계수: 연속형 vs 연속형
  - 두 변수 간의 선형적 관계를 측정
  - -1 ~ 1 사이의 값
  - 0: 독립, 1: 완전한 양의 상관관계, -1: 완전한 음의 상관관계
  - 이상치에 민감

군집분석

“‘