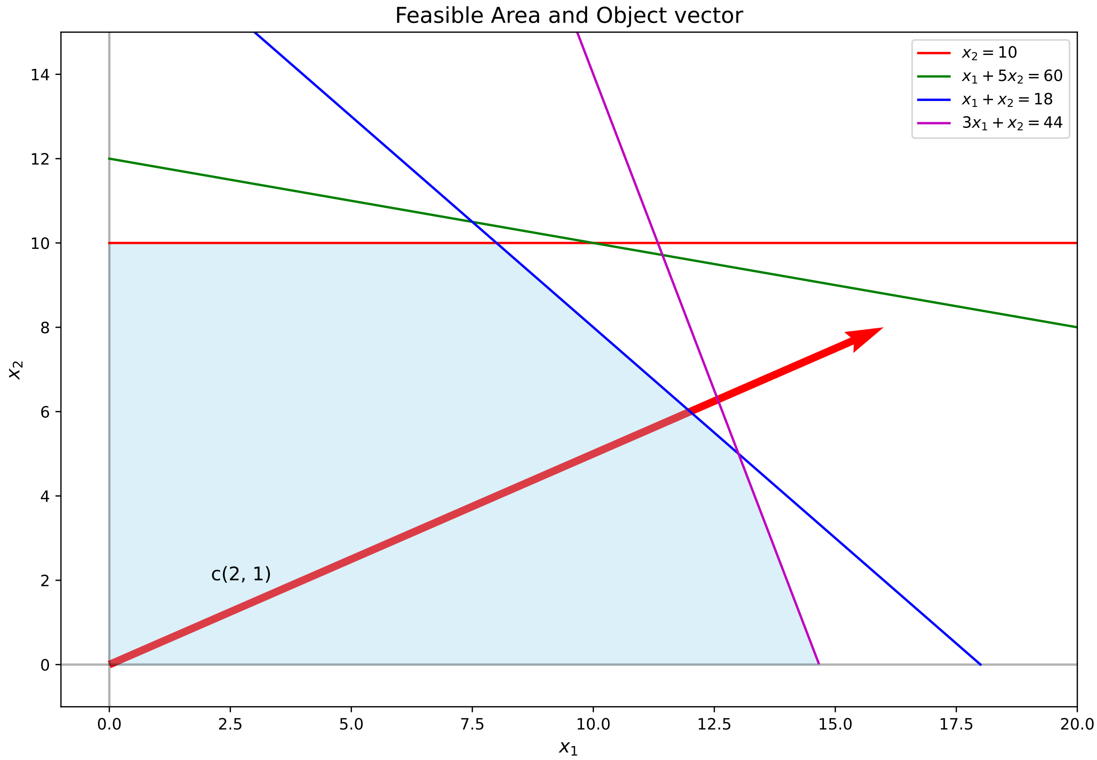
OR 과제 - 1

20192208 김형훈

2025-03-13

3.1.5



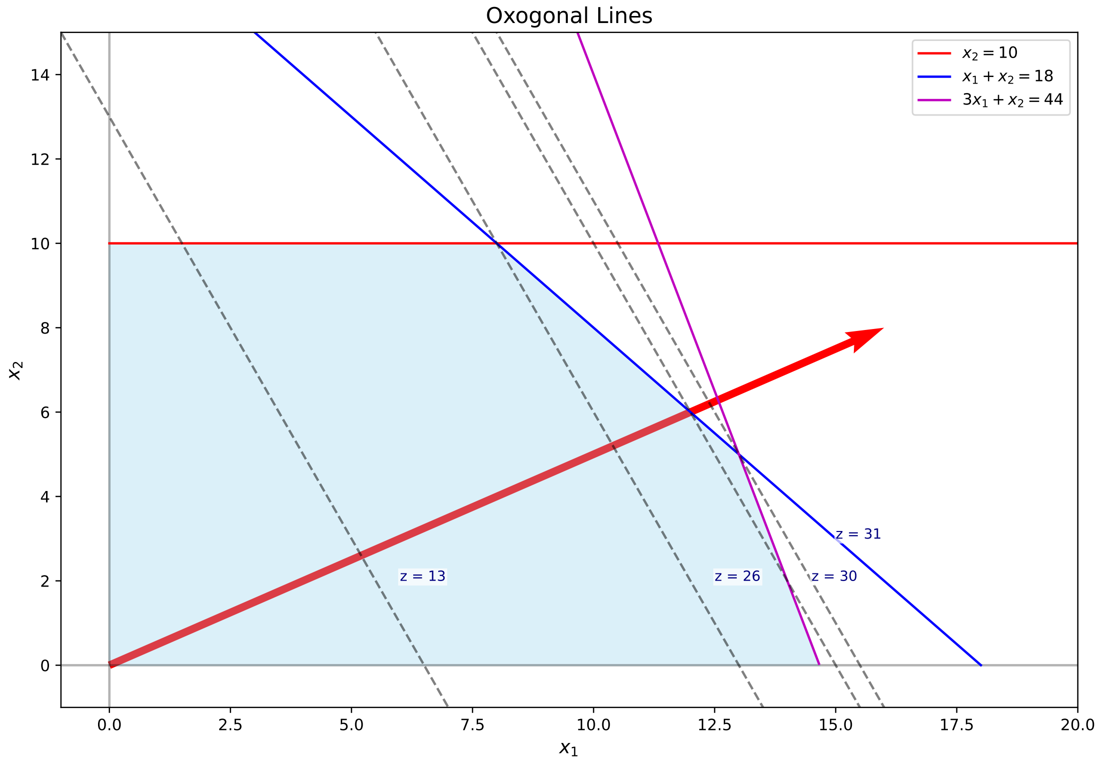
가능해 영역과 obj function의 vector를 그래프로 그려보았다.

이제 최적해를 찾기 위해 obj function과 수직한 직선을 그린 후, 가능해 영역과 만나는 점을 찾아보자.

obj function과 수직인 직선은 vector (2, 1)과 dot product시 0인 vector(1, -2)의 기울기를 가진다.

고로 직선의 방정식은 $x_2 = -2x_1 + z$이다.

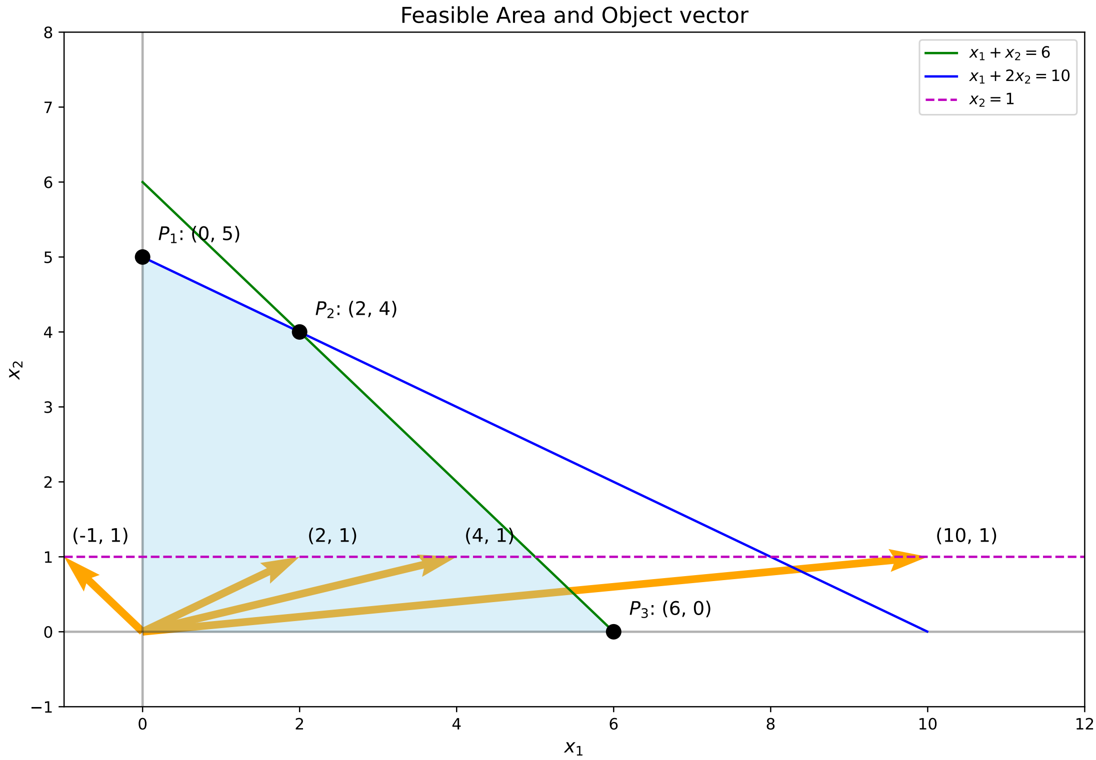
z의 값이 최대가 되는 경우를 찾아보자.



가능해 영역에서 목적함수는 최대 31의 값을 가진다.

고로 답은 31

3.1.12



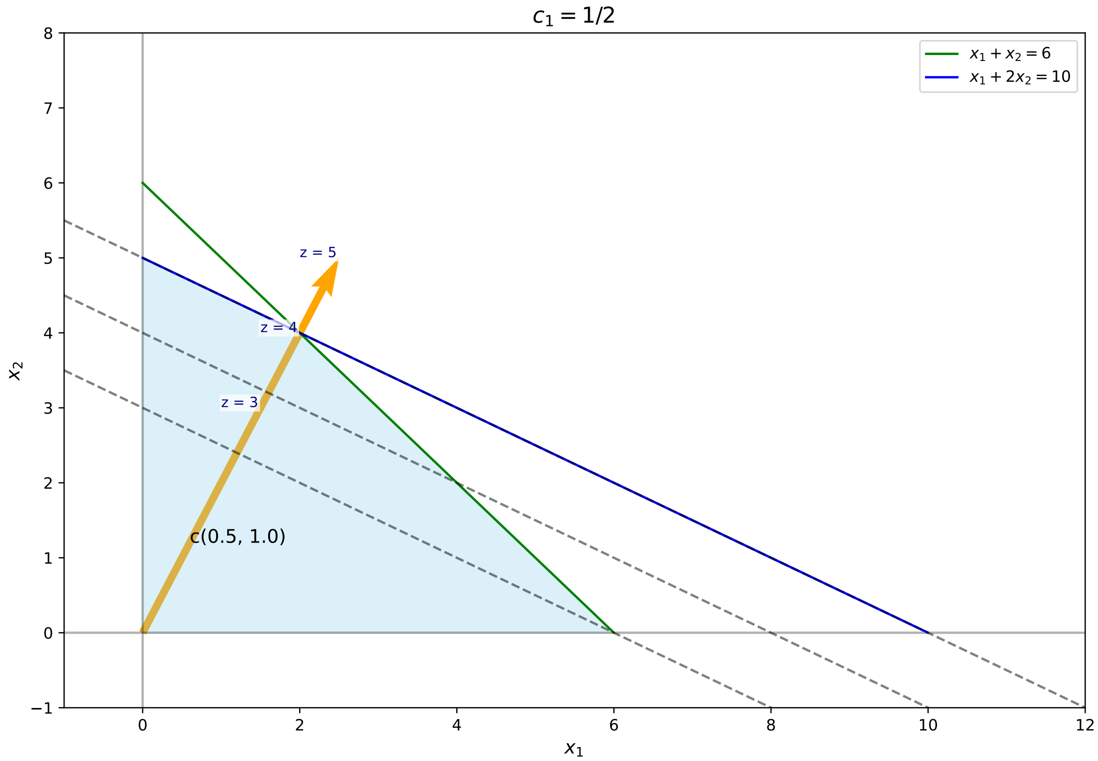
위의 그래프와 같이, c_1의 값에 따라 목적함수의 벡터의 방향이 달라지고, 벡터의 방향이 달라지면 최적해도 매번 달라질 수 있다.

이때 (x_1, x_2)의 최적해는 CPF의 edge와 수직이 되는 목적함수의 vector를 분기로 달라진다. 따라서 각각의 edge와 목적함수 벡터가 수직이 되게 하는 c_1의 값을 파악해야 한다.

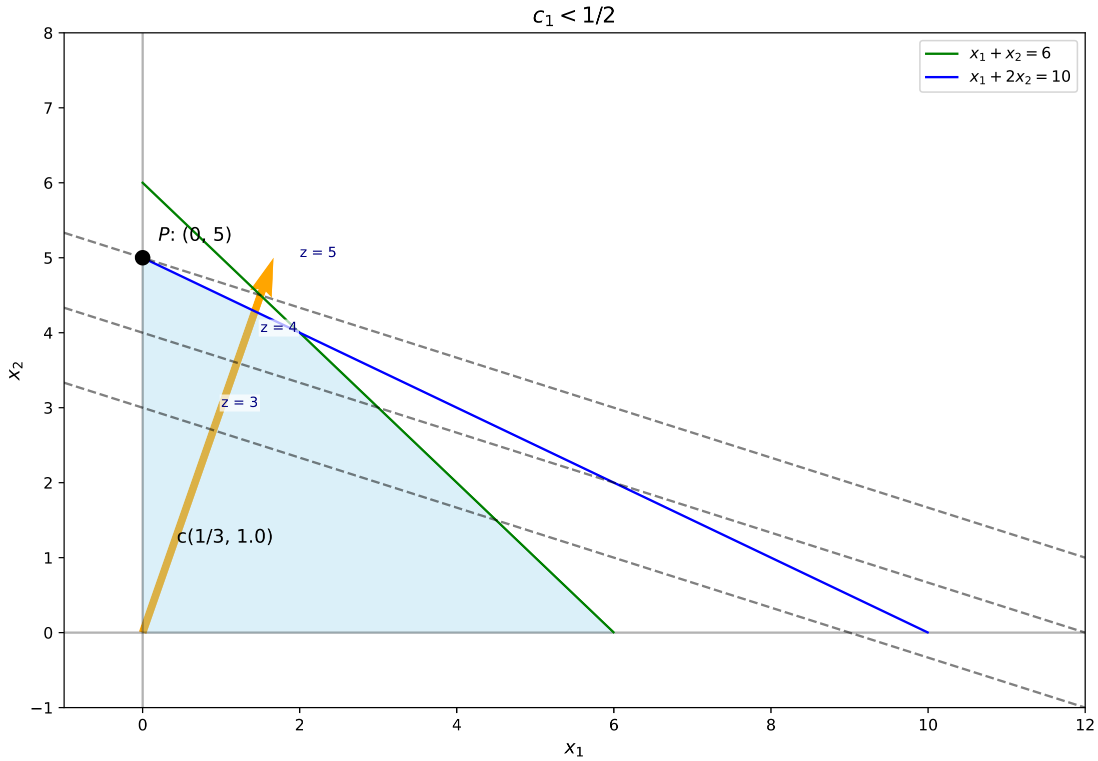
점 (0, 5)에서 점 (2, 4)를 지나는 벡터는 (2 - 0, 4 - 5) = (2, -1)이다. 이와 수직한 방향 벡터는 (1, 2)이고, x_2가 1이 되도록 scaling하면 $(\frac{1}{2}, 1)$이 된다.

점 (2, 4)에서 점 (6, 0)을 지나는 벡터는 (6 - 2, 0 - 4) = (4, -4)이다. 이와 수직한 방향 벡터는 (1, 1)이다.

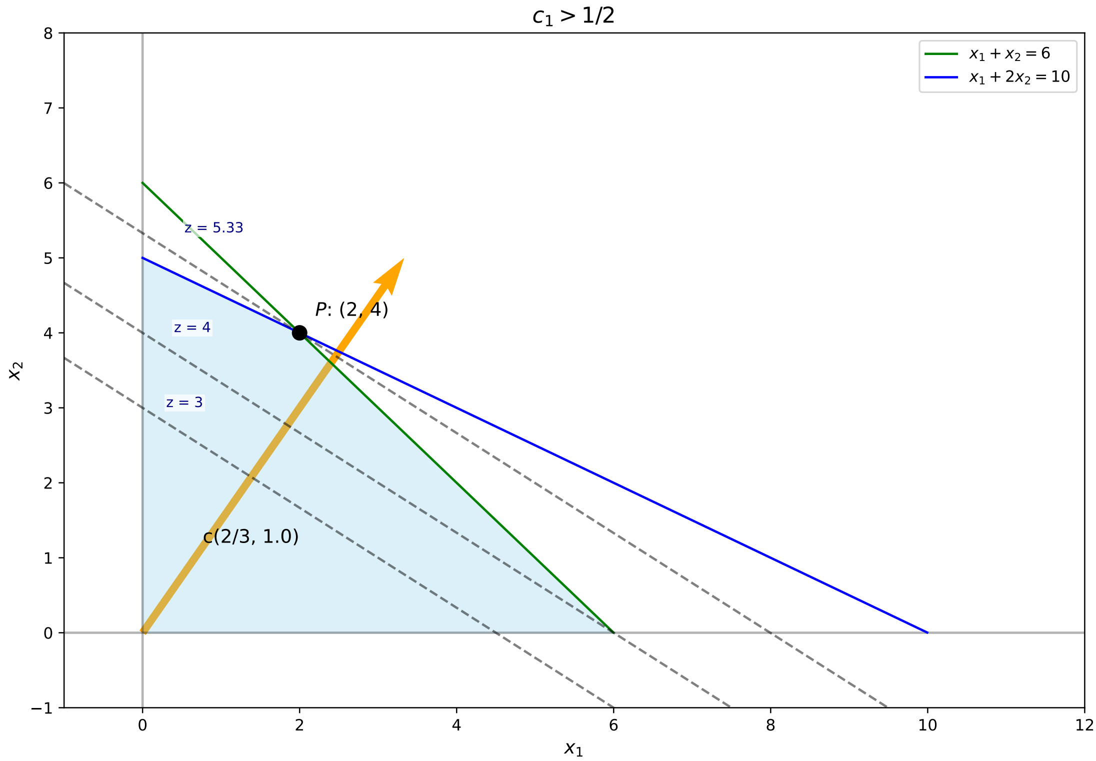
이제 c_1의 값이 $\frac{1}{2}$와 1을 지날 때, 각각 최적해가 어떻게 변하는지 그래프로 살펴보자.



위 그래프와 같이 c_1이 $\frac{1}{2}$일 때 최적해는 제약 함수와 정확히 일치하여, ∞개의 optimal solution을 가지게 된다.



만약 c_1이 $\frac{1}{2}$보다 작은 경우, 최적해는 $(0, 5)$가 된다.

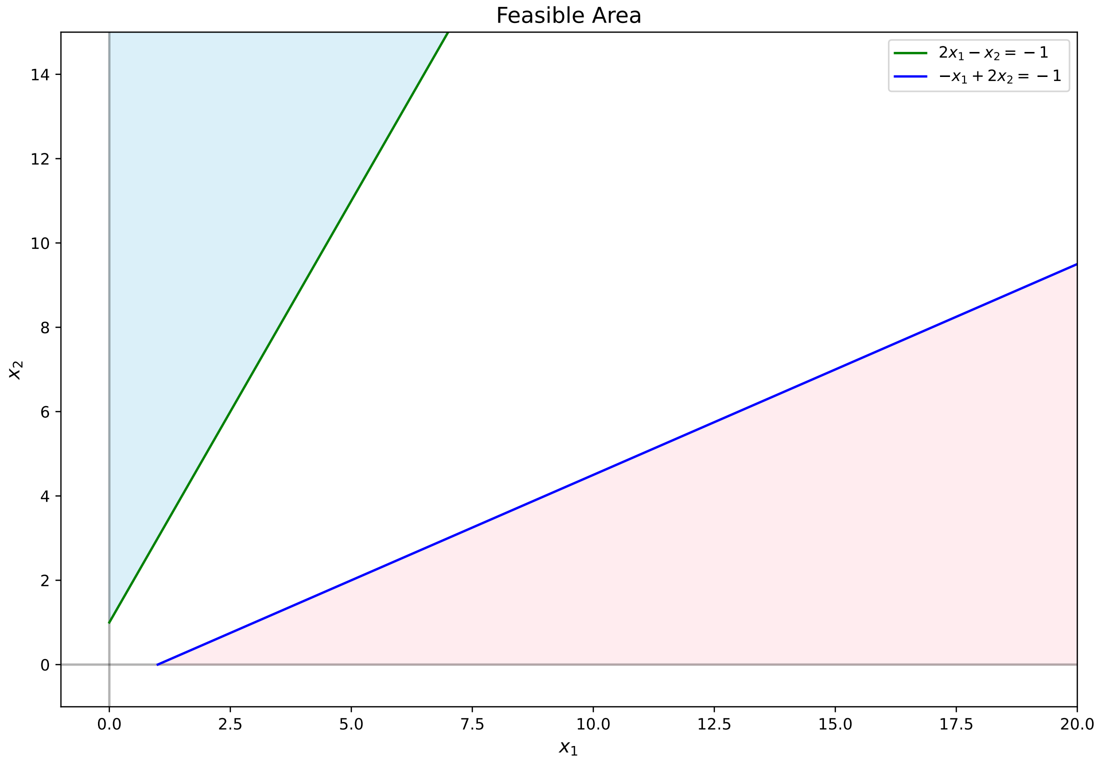


반면 c_1이 $\frac{1}{2}$보다 큰 경우, 최적해는 (2, 4)가 된다.

위와 같이 c_1의 값을 (6, 0), (2, 4)의 edge에 대해서도 조정을 해보면 최종적으로 아래와 같은 수식을 구할 수 있다.

$$\begin{cases} (0,5) & \text{if } c_1 < \frac{1}{2} \\ \infty & \text{if } c_1 = \frac{1}{2} \\ (2,4) & \text{if } \frac{1}{2} < c_1 < 1 \\ \infty & \text{if } c_1 = 1 \\ (6,0) & \text{if } c_1 > 1 \end{cases}$$

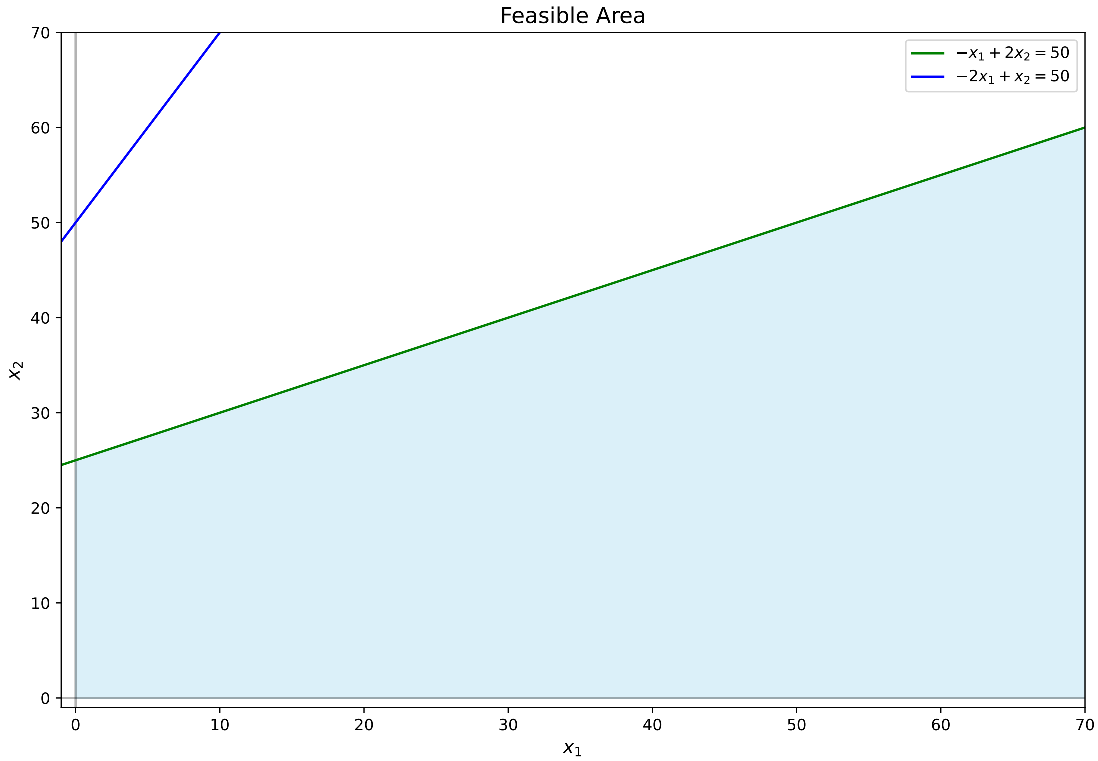
3.2.5



제약식의 공통 영역이 존재하지 않는다. 따라서 feasible area가 존재하지 않는다.

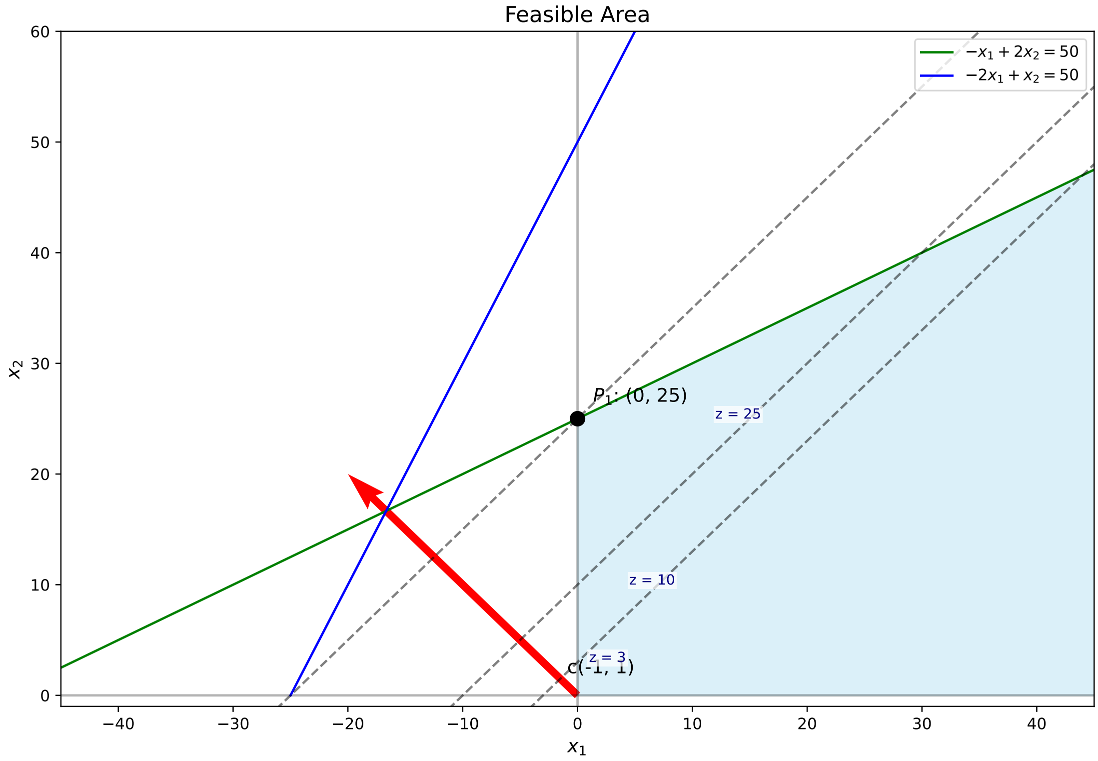
3.2.6

a



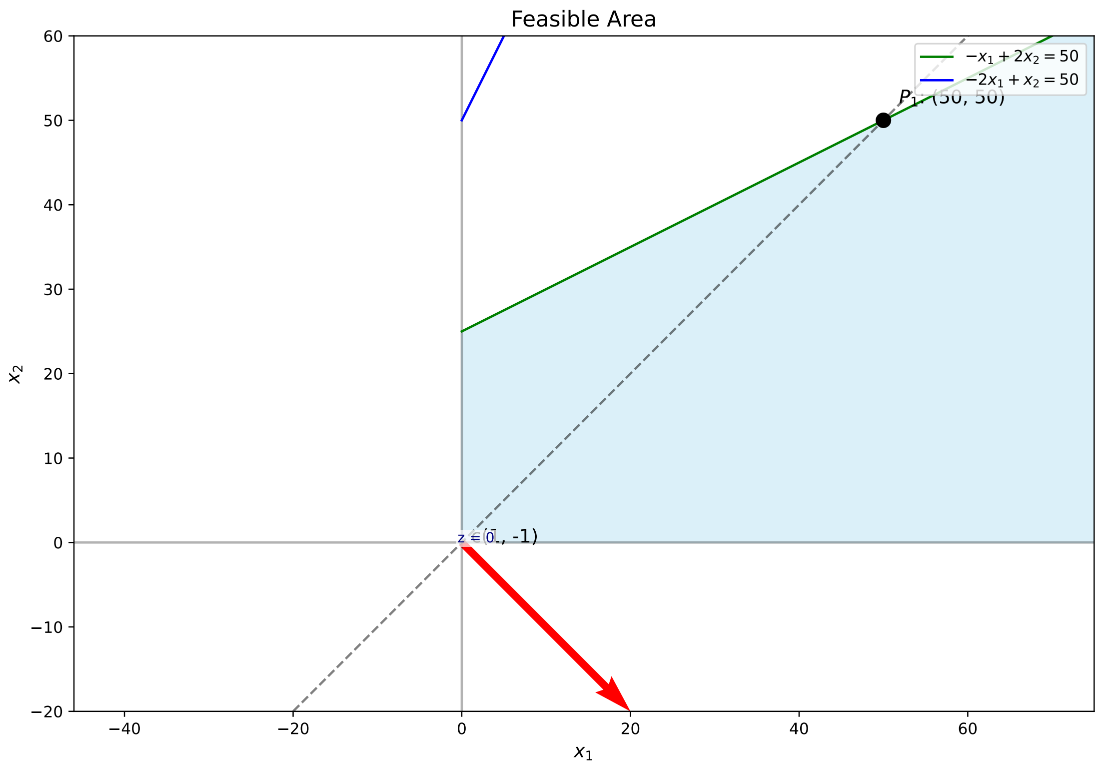
$-x_1 + 2x_2 = 50$ 아래의 영역이 모두 feasible area 이므로 한계가 없다.

b



(0, 25)에서 최적해를 가진다.

c



(50, 50)에서 최적해를 가진다.

d

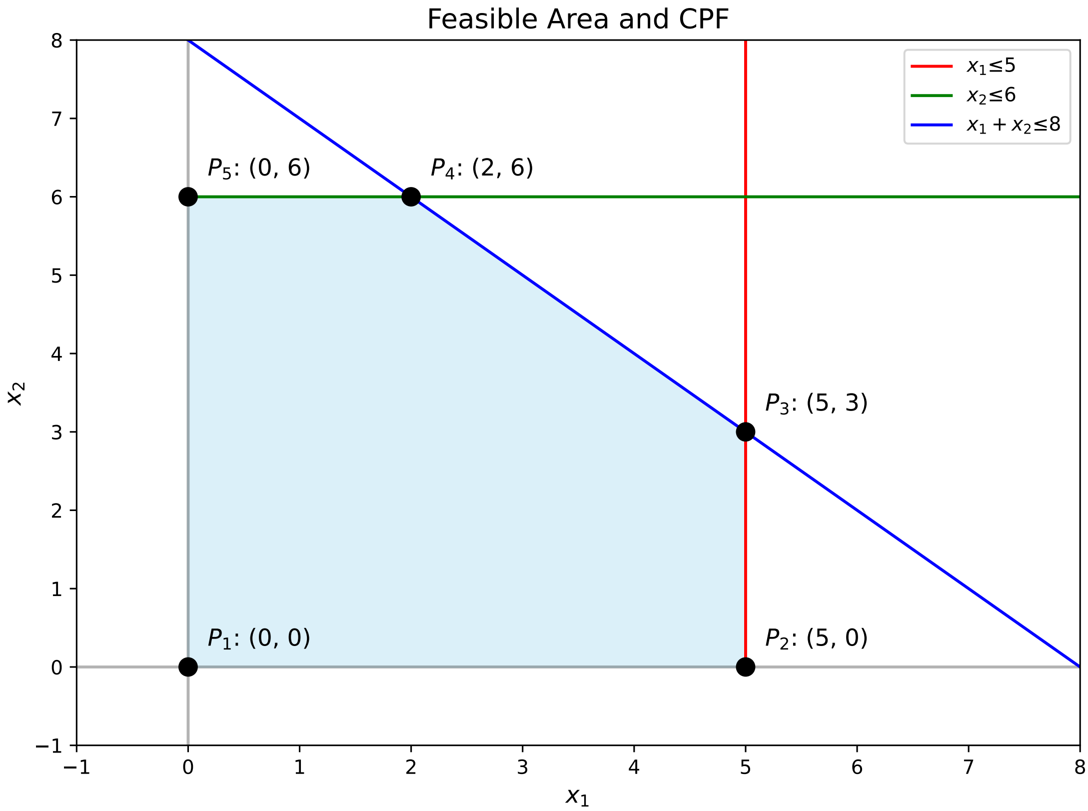
일단 part b, c에서 제시된 목적함수에 대한 최적해는 존재한다.

하지만, 여기서 모델링한 모형은 feasible area가 무한하기 때문에 최적해가 무한대로 나올 수 있다. (목적함수 벡터가 양의 방향이면 무한한 최적해가 나올 수 있을듯 하다.)

이런 경우는 제약조건이 누락되었거나 잘못되었을 가능성이 높아보인다.

4.1.1

a



b

CPF	경계선 방정식
$P_1(0,0)$	$x_1 = 0, x_2 = 0$
$P_2(5,0)$	$x_1 = 5, x_2 = 0$
$P_3(5,3)$	$x_1 = 5, x_1 + x_2 = 8$
$P_4(2,6)$	$x_2 = 6, x_1 + x_2 = 8$
$P_5(0,6)$	$x_1 = 0, x_2 = 6$

c

그냥 각 CPF의 좌표가 경계선의 방정식을 푼 x_1, x_2 값이다.

d

CPF	인접 CPF
$P_1(0,0)$	$P_2(5,0), P_5(0,6)$
$P_2(5,0)$	$P_1(0,0), P_3(5,3)$
$P_3(5,3)$	$P_2(5,0), P_4(2,6)$
$P_4(2,6)$	$P_3(5,3), P_5(0,6)$
$P_5(0,6)$	$P_1(0,0), P_4(2,6)$

e

CPF 쌍	공유 제약식 경계선
$P_1(0,0), P_2(5,0)$	$x_2 = 0$
$P_1(0,0), P_5(0,6)$	$x_1 = 0$
$P_2(5,0), P_3(5,3)$	$x_1 = 5$
$P_3(5,3), P_4(2,6)$	$x_1 + x_2 = 8$
$P_4(2,6), P_5(0,6)$	$x_2 = 6$